

# I problemi: struttura e linguaggio



III incontro del Progetto di Matematica  
22 aprile 2016

*Eleonora Faggiano*



## Di cosa parleremo?

- Il ruolo centrale dei problemi nell'educazione matematica: problem solving e pensiero computazionale
  - Le difficoltà dei problemi e nei problemi: misconcetti, strutture e linguaggi
  - Alcune indicazioni per il lavoro nelle classi
- 
- 
- 

## La risoluzione di problemi... già nei Programmi dell'85



Il pensiero matematico è caratterizzato dall'attività di **risoluzione di problemi**

## La risoluzione di problemi... nelle Indicazioni per il curricolo



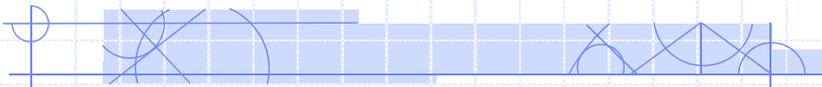
Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come **questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana**, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola

# La risoluzione di problemi... nelle Indicazioni del 2012

Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diverse modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che s'intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive



## Il ruolo dei problemi nella didattica della matematica ...e nella vita



...il pensiero computazionale



# Il pensiero computazionale

- Premesse:
  - Il pensiero computazionale va ben oltre l'uso della tecnologia, ed è indipendente da essa (sebbene la sfrutti intensivamente)
  - Può contribuire ad apprendere strategie di risoluzione di problemi, progettazione e comunicazione

# Il pensiero computazionale

- ...un insieme di saperi, concettuali e metodologici, e di capacità di contestualizzazione applicativa che devono diventare patrimonio di tutti e devono quindi essere presenti nei curricula sin dalla scuola primaria

## Nelle Indicazioni Nazionali...

- *Prevedere lo svolgimento e il risultato di semplici processi o procedure in contesti conosciuti e relativamente a oggetti e strumenti esplorati*
- *Seguire istruzioni d'uso e saperle fornire ai compagni*
- *Rappresentare oggetti e processi con disegni e modelli*

9

## ... nelle Indicazioni Nazionali

- *Distinguere, descrivere con le parole e rappresentare con disegni e schemi elementi del mondo artificiale, cogliendone le differenze per forma, materiali, funzioni*
- *Comporre e scomporre oggetti nei loro elementi*

10

## L'obiettivo non è imparare a programmare ma...

- Saper usare il pensiero computazionale in una pluralità di contesti - negli aspetti scientifici, sociali e applicativi - permette di sperimentarne appieno le potenzialità, i limiti e le implicazioni sociali e di cittadinanza attiva



- ... una competenza per la vita e per qualunque professione!

11

## Lo sviluppo del pensiero computazionale:

- Fornisce un apparato concettuale che permette di riflettere su e/o modellare una costruzione intessendo un rapporto tra un progetto e la sua realizzazione
- Richiede un profondo cambiamento della didattica da trasmissiva a laboratoriale, strutturata per progetti, che incentivi la collaborazione e la discussione

## C'è problema e problema

- I problemi dei libri di testo
  - Con la moltiplicazione
  - Con due operazioni
  - Con dati superflui
  - ...
  - “senza senso”
- I problemi “in gara”
- I problemi delle prove INVALSI

## I problemi dei libri di testo



Esercizi... attività di riscaldamento

# I problemi dei libri di testo



Purché non siano "incomprensibili"  
e/o privi di senso!



Il biglietto aereo di andata e ritorno da Firenze  
a Lisbona per 4 persone costa 1300 euro.

Quanto costa il viaggio di andata e ritorno per  
una persona?

La compagnia aerea nel volo della sera ha  
incassato 28600 euro.

Quanti biglietti sono stati venduti?



## Con i problemi dei libri di testo

- Si vogliono **valutare conoscenze e abilità** e quindi si identifica il successo con la produzione di risposte corrette



- L'errore diventa qualcosa assolutamente da non commettere!



## Con i problemi dei libri di testo

- Per aumentare la probabilità che gli allievi non facciano errori e diano risposte corrette:
  - Si riduce la complessità o la si dichiara in partenza (es. problemi con due operazioni, problemi con dati mancanti...)
  - Si suggeriscono parole chiave e conseguenti modi di agire (es. se c'è la parola "meno" devi sottrarre, risolvi col diagramma...)
  - Si insiste sulle procedure da applicare e sulle regole



## Es. i diagrammi a blocchi...

### Problema

Fabio e Andrea vogliono fare un picnic.  
Comprano il pane e spendono € 0,85, il  
prosciutto € 2,80, le bibite € 3,60 e le merende  
€ 3,58. **Quanto spenderanno in tutto?**  
Le pagano con una banconota da  
€ 20, **quanto riceveranno di resto?**

### Dati utili

- € 0,85: il pane
- € 2,80: prosciutto
- € 3,60: bibite
- € 3,58: merende
- € 20: con cui paga

### Indico

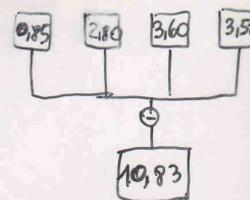
$$0,85 + 2,80 + 3,60 + 3,58 = 10,83 \text{€ (totale)}$$

$$10,83 - 20 = 10,83 \text{€ (resto)}$$

### Opero dovendo

$$\begin{array}{r} 0,85 + \\ 2,80 + \\ 3,60 + \\ 3,58 = \\ \hline 10,83 \\ \text{dovendo} \\ 10,83 - \\ \hline 20,00 = \\ \hline 10,83 \end{array}$$

...e poi?



### Rispondo

In tutto spende € 10,83 centesimi.  
Di resto riceverono € 10,83 centesimi.

## Es: il metodo degli asterischi...

101 Il perimetro di un parallelogramma misura 48 cm; un suo lato è congruente al doppio di quello consecutivo. Determina le misure dei lati.

Come hai studiato in Aritmetica, questo tipo di problemi si può risolvere anche con il "metodo degli asterischi".

**Dati**

$$\overline{BC} = *$$

$$\overline{AB} = 2 \overline{BC} = **$$

$$p_{ABCD} = 48 \text{ cm}$$

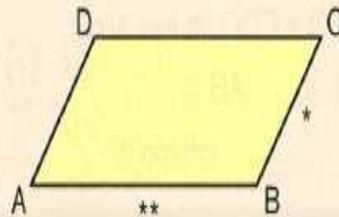
$$48 \text{ cm} : 2 = \dots \text{ cm} \quad (\text{semiperimetro} = ***)$$

$$\dots \text{ cm} : \dots = \dots \text{ cm} \quad (* = \overline{BC})$$

**Domanda**

$$\overline{BC} = ?$$

$$\overline{AB} = ?$$

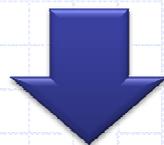


$$\dots \text{ cm} \cdot \dots = \dots \text{ cm} \quad (** = \overline{AB})$$

## Problemi... ed errori

- Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta **ma non sa come raggiungerla**

[Karl Duncker, 1945]



- L'errore non è sintomo di fallimento... anzi!!  
Occorre imparare ad imparare dagli errori

## Problemi... e

- Un problema ha una meta



- L'errore non è sintomo di fallimento... anzi!!  
Occorre imparare ad imparare dagli errori

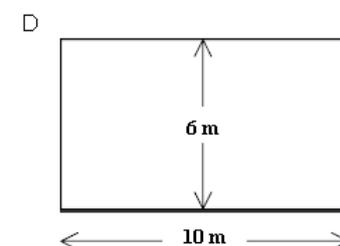
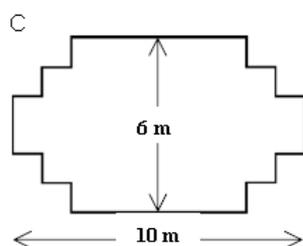
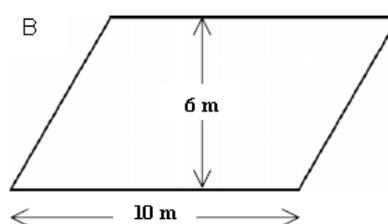
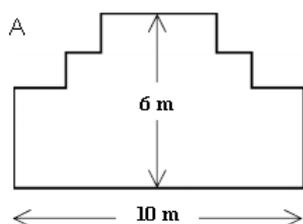
## Problemi da affrontare... più che da risolvere

- Il valore di un problema non sta tanto nel trovarne la soluzione, quanto nelle idee che fa sorgere in chi lo affronta e nei tentativi messi in atto
- Quale è il modo migliore per imparare a risolvere problemi?
  - Affrontare problemi!

[Paul Halmos]

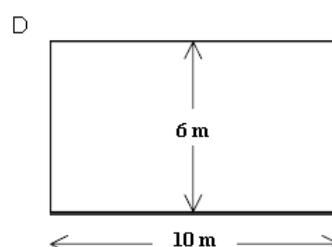
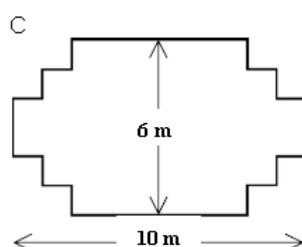
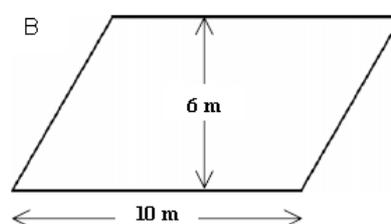
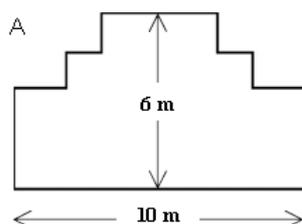
## Es.: Il problema del carpentiere

Un carpentiere ha 32 metri di tavole di legno e vuole fare il recinto ad un giardino. Per il recinto prende in considerazione i seguenti progetti:



25

Per ciascun progetto indica, spiegando il ragionamento fatto, se è possibile realizzarlo con 32 metri di tavole



26

## C'è problema e problema

- I problemi dei libri di testo
- I problemi "in gara"
  - Es. I problemi dell'RMT
- I problemi delle prove INVALSI



## I problemi "in gara": il Rally Matematico Transalpino



<http://www.math.unipr.it/~rivista/RALLY/home.html>



## Una breve storia

- 1992 La rivista svizzera (Svizzera romanda) "MATH-ECOLE" Direttore François Jaquet lancia una sfida (gara di problemi) per le classi III, IV e V elementare
- 1995 La gara approda in Italia a Parma e a Rozzano e il Rallye mathématique romand diventa Rallye mathématique transalpin
- 2002 Al decimo Rally partecipano più di 2000 classi
- 2010 18° Rally. Categorie in gara dalla 3 alla 10

## Motivazioni

- La risoluzione dei problemi favorisce l'apprendimento della matematica
- Confronti e gare possono suscitare notevole interesse, sia come lavoro di gruppo in classe sia come lavoro tra classi

Lavoro collettivo per i ragazzi  
Lavoro di osservazione per gli insegnanti

## Lavorare in gruppo

- Sapersi organizzare
- Dividersi il lavoro
- Gestire il tempo
- Apportare il proprio contributo
- Accettare o confutare motivando quello degli altri e comprendere i loro punti di vista...

**Queste sono capacità difficili da acquisire, ma sempre più necessarie per adattarsi alla società attuale!**



## Obiettivi del Rally

- Fare matematica attraverso la risoluzione di problemi
- Sviluppare le capacità di lavorare in gruppo sentendosi responsabili
- Imparare a "parlare di matematica", a spiegare idee e procedimenti



[ Parentesi

Si può fare matematica  
attraverso  
la risoluzione di problemi?



Per attivare processi di pensiero  
significativi...

La complessità è necessaria



Dalla valutazione di conoscenze e abilità  
alla costruzione di conoscenze e  
competenze



# LA PEDALATA

Osserva e leggi attentamente il manifesto:

**Il gruppo sportivo Meldolese organizza per**

*domenica 10 maggio*

un'allegria pedalata di 26 Km



**Quote di partecipazione:**

*Bambini € 3,50    Adulti € 5,00*

**Premi:**

Un simpatico omaggio a tutti i partecipanti

Un buono acquisto del valore di € 50,00 al partecipante più giovane e al più anziano

*È prevista una sosta a metà percorso*

**Partenza ore 9:00 da piazza F. Orsini**

Rispondi alle seguenti domande  
e, quando necessario, esegui i  
calcoli

1. Per quale giorno è stata organizzata la manifestazione?
2. A che ora comincerà la pedalata?
3. Qual è il costo dei biglietti per i partecipanti?
4. Qual è la differenza di costo fra i biglietti?
5. Giulia è la partecipante più giovane. Cosa riceverà?
6. Quanti km è lungo il percorso?
7. Dopo quanti km i partecipanti si fermeranno per fare una sosta?
8. La famiglia Rossi, composta da padre, madre e due bambini parteciperà alla pedalata. Quanto dovrà pagare?

Chiusa parentesi]

## Regole di gara

- Tempo a disposizione limitato
- Assenza dell'insegnante ufficiale e di interventi esterni
- Totale responsabilità degli allievi nella gestione del lavoro
- Scelta di una sola risposta di classe per ciascun problema con obbligo di spiegazione della procedura seguita e giustificazione della risposta

Osservazione: Le regole del gioco impongono la cooperazione e la valorizzazione delle interazioni fra allievi

## La competizione

- In ciascuna prova la classe riceve una serie di una decina di problemi da risolvere
- Questi problemi sono scelti in modo tale che ogni allievo, anche tra i più deboli, possa trovarvi il proprio ruolo e che l'insieme del compito sia globalmente troppo pesante per un solo allievo

## Regole per la competizione

- La classe dispone di un tempo limitato per organizzarsi, ricercare le soluzioni, discuterne e redigerle. La durata è di 50 minuti, dalla distribuzione dei problemi
- Gli allievi devono produrre una risposta unica per ciascuno dei problemi: la classe è responsabile delle risposte date
- Non c'è solo "la risposta giusta" che conta, le soluzioni sono giudicate anche in base al rigore dei passaggi e alla chiarezza delle spiegazioni fornite



## Ruolo dell'insegnante

- L'insegnante lascia il ruolo di "maestro" per quello di osservatore, astenendosi da ogni intervento
- Durante gli allenamenti osserva i propri allievi
- Nel corso della gara si scambia con uno dei suoi colleghi
- Prende parte a tutte le tappe del Rally nella misura delle sue disponibilità: preparazione e scelta dei problemi; correzione in comune; analisi delle soluzioni; discussione ed esplorazione ulteriore in classe dei problemi e delle loro soluzioni



## I problemi dell'RMT sono creati per...

- avere un interesse sul piano matematico
- essere interessanti, originali e coinvolgenti
- corrispondere al grado di sviluppo degli allievi
- permettere connessioni con altre questioni di matematica da svolgere in classe
- poter essere affrontati con diverse strategie risolutive
- contenere una certa varietà delle difficoltà per permettere a ciascuno degli allievi di partecipare in funzione delle proprie competenze

## Elaborazione dei problemi

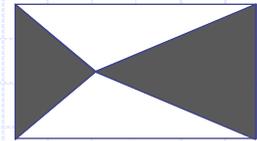
- Il linguaggio del loro enunciato è chiaro e rigoroso per evitare gli assunti impliciti e i "non-detti" legati ad abitudini locali
- Lo stile è piacevole, adatto al livello di linguaggio degli allievi, in rottura con le formulazioni assai spesso stereotipate degli esercizi tradizionali
- Dal punto di vista matematico, sono pertinenti, hanno una o più soluzioni, sono adeguati allo sviluppo degli allievi delle conoscenze richieste per risolverli

## Es.1: Il terreno in eredità

Due fratelli ereditano un terreno di forma rettangolare. Per dividerlo in due parti della medesima estensione, un conoscente suggerisce loro di piantare un palo in un punto qualsiasi del terreno e congiungerlo ai quattro paletti infissi nei quattro vertici del terreno rettangolare. Uno dei fratelli prenderà la parte colorata in grigio nel disegno, l'altro la rimanente.

**Le due parti sono davvero uguali?**

**Giustificate il vostro ragionamento**



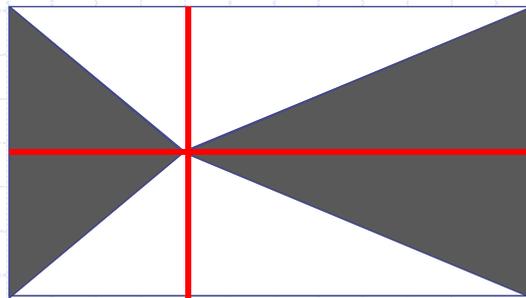
## Analisi a priori e a posteriori

- È molto importante che ogni insegnante effettui una analisi a priori del problema, evidenziando l'ambito concettuale e le conoscenze e capacità che devono entrare in gioco
- Allo stesso modo importante è l'analisi a posteriori, che consentirà poi nel confronto con la propria classe di socializzare successi e insuccessi comprendendone le motivazioni



## Analisi a priori del problema proposto

- Capire che comunque si scelga il punto dove mettere il palo sul terreno rettangolare, se si conducono le parallele ai lati, la parte grigia e quella bianca sono entrambe composte dagli stessi quattro triangoli A, B, C, D.



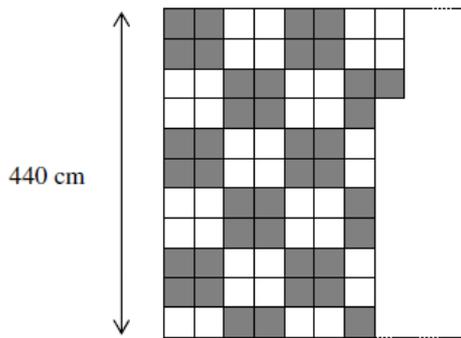
## Es.2: La pavimentazione

Le dimensioni del pavimento di una stanza rettangolare sono 440 centimetri e 680 centimetri.

Si decide di pavimentare la stanza con piastrelle bianche e piastrelle grigie, tutte quadrate, secondo un motivo regolare.



Il piastrellista ha già sistemato 7 file complete di piastrelle e ne ha messe 3 nell'ottava fila.



Si riposa un po' e osserva che ha messo lo stesso numero di piastrelle grigie e di piastrelle bianche.

Quando la pavimentazione sarà terminata, ci sarà ancora lo stesso numero di piastrelle grigie e di piastrelle bianche?

Se non è così, ci saranno più piastrelle grigie di quelle bianche o meno? e quante di più o di meno?



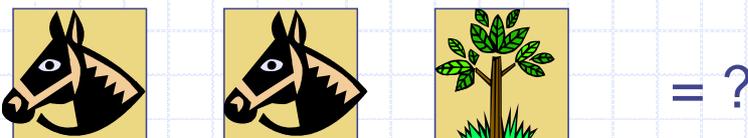
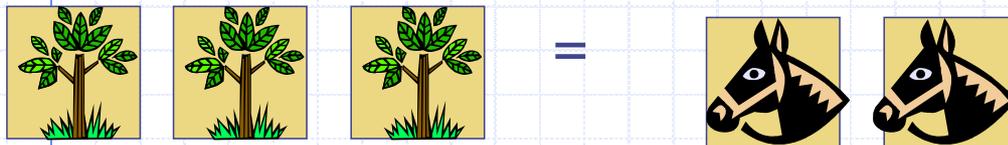
## I francobolli

Nel paese di Balin Balù, ci sono solo tre tipi di francobolli raffiguranti dei cavalli, degli alberi e il sole.

- 4 cavalli valgono tre soli
- 3 alberi valgono 2 cavalli

**Quanti soli occorrono per sostituire due cavalli e un albero?**





## Analisi a priori...

1. Comprendere che, a partire dalle relazioni di equivalenza date, se ne possono trovare delle altre per “proporzionalità elementare” (per esempio se 3 alberi valgono 2 cavalli, allora 6 alberi valgono 4 cavalli)
2. Lavorare per transitività (per es. se 6 alberi valgono 4 cavalli e 4 cavalli valgono 3 soli, allora 6 alberi valgono 3 soli...)
3. Lavorare per sostituzione
4. Combinare i tre tipi di sostituzioni precedenti: 2 cavalli e 1 albero fanno 4 alberi e 4 alberi corrispondono a 2 soli



## ...analisi a priori

L'analisi a priori prevede che gli allievi lavorino solo con i numeri naturali mediante l'uso di "proporzionalità elementare" necessaria per applicare successivamente la proprietà transitiva, infine con una semplice sostituzione si giunge alla soluzione. In questo modo si lavora per gruppi di francobolli determinando equivalenze analoghe a quelle inserite nell'enunciato del problema. Questa procedura è suggerita soprattutto dall'immagine, che illustra le equivalenze assegnate.



## Album di fotografie

Elisa ha sistemato in un album le foto fatte durante le vacanze.

Le foto sono 80 ed Elisa le ha disposte in 29 pagine: in alcune pagine ha messo 4 foto e in altre 2.

Quante sono le pagine con 4 foto e quante quelle con 2?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.



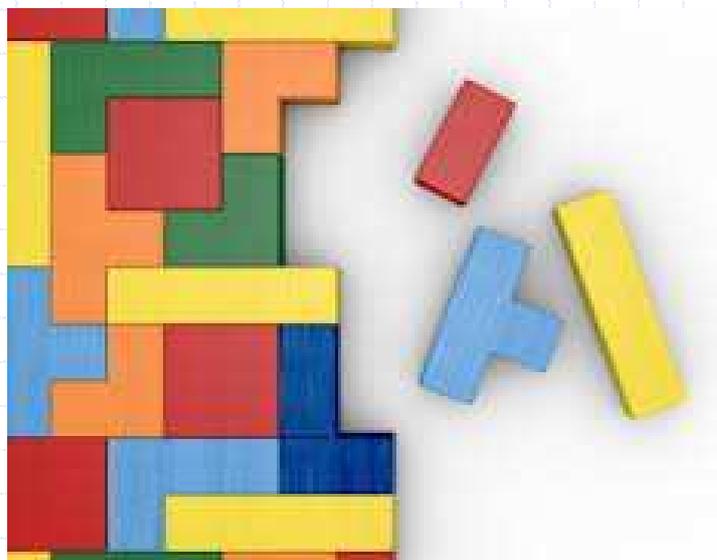
## Riflessioni

- I saperi messi in gioco dai gruppi sono molteplici e di tipo diverso
- Problemi tipo quello proposto consentono di evidenziare una grande varietà e diversità di procedure e di conoscenze, che altrimenti restano nascoste
- Se la gara resta fine a se stessa e i problemi non vengono ripresi e dibattuti in classe, la ricchezza delle procedure e delle conoscenze va persa

## C'è problema e problema

- I problemi dei libri di testo
- I problemi "in gara"
- I problemi delle prove INVALSI
  - Un'occasione...

# Le Prove Invalsi

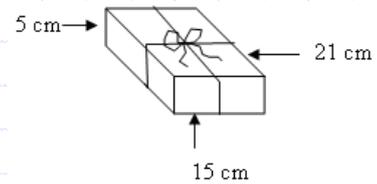


## Obiettivo delle Prove Invalsi

“Valutare gli apprendimenti”  
inteso come  
ricercare, ottenere, organizzare e  
restituire informazioni  
sugli apprendimenti in matematica dei  
ragazzi, così come individuati e descritti  
nelle Indicazioni Nazionali

## Quesito D17

Alessandra acquista un libro all'ipermercato; a casa prepara un pacchetto simile a questo:



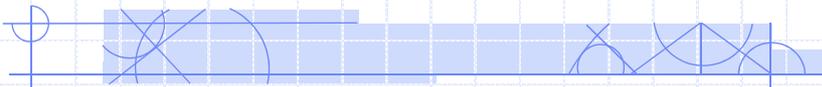
Quanti cm di nastro ha usato in tutto, sapendo che per fare il fiocco ne sono serviti 30 cm?

- A. 41
- B. 71
- C. 112
- D. 122

Non risponde	A	B	C	D
2,2	28,9	41,5	12,6	14,7



## Misconcetti, strutture e linguaggi



... dei problemi e nei problemi



## Gli stereotipi dei problemi

- Sono presenti tutti e soli i dati necessari per rispondere
- C'è sicuramente una e una sola soluzione
- La risoluzione richiede poco tempo
- È necessario applicare conoscenze apprese (recentemente) a scuola
- La soluzione è nel risultato dell'ultima operazione



Se con un metro di stoffa si possono confezionare 4 fazzoletti, quanti metri di stoffa sono necessari per confezionare 10 fazzoletti?



2,5



Se un'automobile può trasportare 4 persone, quante automobili sono necessarie per trasportare 10 persone?

~~2,5~~

3

Un furgone deve trasportare blocchi di marmo del peso di 4 tonnellate ciascuno. Se il furgone ha una portata di 10 tonnellate di carico utile, quanti blocchi può trasportare con ogni viaggio?

~~2,5~~

2

Se per cuocere 4 etti di pasta si impiegano 10 minuti, quanti ce ne vogliono per cuocerne un chilo?

~~2,5~~

10

- Per evitare che nasca lo stereotipo del "problema di matematica"
- Per dare maggiore importanza al processo
- Per sollecitare la ricerca di strategie risolutive diverse

**È quindi importante**

- Proporre spesso problemi non matematizzati
- Proporre problemi che si risolvono per tentativi
- Proporre problemi in cui bisogna selezionare le informazioni per scegliere quelle utili
- Proporre problemi che hanno più soluzioni
- Proporre problemi che non hanno soluzioni

## ma anche...

- Abituare i bambini a valutare se il procedimento è corretto e razionale
- ... a verificare se il risultato raggiunto è compatibile con le attese
- ... ad analizzare ed eventualmente rappresentare la situazione proposta per comprenderla a fondo
- ... a discutere il testo per rintracciarne eventuali carenze



## ... in definitiva chiedere di:

- Esplicitare un motivato "piano di soluzione"
- Risolvere il problema
- Confrontare il risultato con quanto proposto nel "piano di soluzione"



## Paolo non era contento per niente...

*Sapeva di non essere uno stupido, ma allora perché non riusciva mai a risolvere un problema?*

*Lui non era convinto di "mancare di logica"*

*Erano i problemi ad essere poco logici...*

*...così scritti risultavano noiosi, stupidi, privi di fantasia e incomprensibili*

*Non c'era altro da fare che... riscriverli*

## Problemi di fantalogica

*... un libro di problemi da leccarsi le dita, con dentro tanta di quella logica da poterla raccogliere a secchiate*

*... e anche un po' di fantasia!*

[Stefano Bordiglioni, Un problema è un bel problema, Emme edizioni]

*leonora.faggiano@uniba.it*

*antonella.montone@uniba.it*

*michele.pertichino@uniba.it*

*michele.fiorentino@uniba.it*

## Arrivederci al 30 maggio



... dopo i laboratori del pomeriggio

<http://www.math.unipr.it/~rivista/RALLY/home.html>

