

FRAZIONI E NUMERI RAZIONALI

Prof.ssa Antonella Montone
antonella.montone@uniba.it

Introduzione

Il processo di insegnamento – apprendimento delle frazioni è certamente uno dei più studiati da quando esiste la ricerca in Didattica della Matematica, forse perché (insieme al tema, ad esso connesso, dei numeri “decimali”) costituisce uno dei più evidenti insuccessi della scuola, in tutti i Paesi del mondo.

Dalle Indicazioni Nazionali

- **Obiettivi di apprendimento al termine della III primaria**
 - Leggere, scrivere, confrontare numeri decimali, rappresentarli sulla retta ed eseguire semplici addizioni e sottrazioni, anche con riferimento alle monete o ai risultati di semplici misure
- **Obiettivi di apprendimento al termine della V primaria**
 - Leggere, scrivere, confrontare numeri decimali, ed eseguire le quattro operazioni con sicurezza, valutando l'opportunità di ricorrere al calcolo mentale, scritto o con la calcolatrice a seconda delle situazioni.
 - Conoscere il concetto di frazione e di frazioni equivalenti
 - Utilizzare numeri decimali, frazioni e percentuali per descrivere situazioni quotidiane
 - Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta e utilizzare scale graduate in contesti significativi per le scienze e per la tecnica

Obiettivi di apprendimento al termine della III Secondaria di I grado

- Eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, ordinamenti e confronti tra i numeri conosciuti (numeri naturali, numeri interi, frazioni e numeri decimali), quando possibile a mente oppure utilizzando gli usuali algoritmi scritti, le calcolatrici e i fogli di calcolo e valutando quale strumento può essere più opportuno.
- Dare stime approssimate per il risultato di una operazione e controllare la plausibilità di un calcolo.
- Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta.
- Utilizzare scale graduate in contesti significativi per le scienze e per la tecnica.
- Utilizzare il concetto di rapporto fra numeri o misure ed esprimerlo sia nella forma decimale, sia mediante frazione.
- Utilizzare frazioni equivalenti e numeri decimali per denotare uno stesso numero razionale in diversi modi, essendo consapevoli di vantaggi e svantaggi delle diverse rappresentazioni.
- Comprendere il significato di percentuale e saperla calcolare utilizzando strategie diverse.
- Interpretare una variazione percentuale di una quantità data come una moltiplicazione per un numero decimale.

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria

- L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni.
- Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni.
- Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.
- Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza.
- Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...).
- Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ...) si orienta con valutazioni di probabilità.

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado

- L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni.
- Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni.
- Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.
- Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.
- Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.
- Utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ...) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale.
- Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ...) si orienta con valutazioni di probabilità.
- Ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà.

I numeri razionali

- Oltre alla necessità di «contare» insiemi finiti di oggetti, processo che si astrae mediante i numeri interi, nella vita quotidiana si presenta anche la necessità di misurare delle quantità: lunghezze, aree, pesi, tempo.
- Primo passo: ridurre il problema di misurare al problema di contare.
- Secondo passo: scegliere un'unità di misura «arbitraria» per contare (secondo, metro, grammo, piede,...), a cui si attribuisce misura 1.
- Terzo passo: si conta il numero di tali unità contenute nella quantità da misurarsi.
- Quarto passo: si introducono unità di misura di ordine inferiore ottenute con la suddivisione dell'unità originaria in numero n di parti uguali.

In Matematica...

Un'unità di ordine inferiore ottenuta suddividendo l'unità originaria in n parti uguali si indica con $\frac{1}{n}$

Se una data quantità contiene esattamente m di tali unità di ordine inferiore la sua misura si indica con il simbolo $\frac{m}{n}$.

TALE SIMBOLO SI CHIAMA FRAZIONE O RAPPORTO

Dopo secoli di tentativi casuali

Il simbolo m/n fu spogliato del suo riferimento concreto al procedimento di misura e delle grandezze misurate e fu considerato come un

NUMERO PURO

Def: Quando m ed n sono numeri interi, il numero m/n si dice numero razionale

R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*

Insieme dei Razionali

Necessità intrinseca dei numeri razionali:
rendere possibile l'operazione «inversa» della

divisione

$$A x = B$$

Numeri Razionali

- **L'introduzione dei Razionali risponde ad**
 - esigenze concrete (contare, misurare)
 - esigenze di natura matematica (risolvere le equazioni, effettuare sempre la divisione)

“qual è il numero che moltiplicato per 7 fa 4”

Libro V Elementi

Due grandezze A e B si dicono stare nello stesso rapporto di altre due C e D quando per qualunque coppia di numeri m ed n per la quale si abbia $mA > nB$ si ha anche $mC > nD$ mentre se si ha $mA = nB$ si ha anche $mC = nD$ mentre se si ha $mA < nB$ si ha anche $mC < nD$.

Noi scriviamo

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20} = \frac{75}{100} = \frac{750}{1000}$$

$$75 \text{ cm} = 750 \text{ mm} = 0,75 \text{ m}$$

0,75

Frazioni equivalenti

- $\frac{2}{6}$ a quanti dodicesimi equivalgono?

$$\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$$

- $\frac{8}{3}$ a quanti sestanti equivalgono?

$$\frac{8}{3} = \frac{16}{6}$$

Difficoltà e Contraddizioni

- Parti “uguali”
- Parte di un «intero» e la frazione impropria
- Apparente «estraneità» alla vita quotidiana
- Frazione e Numero decimale
- La probabilità che esca il 5 è $1/6$
- Interpretare informazioni:
 - 1 italiano su 4 non mangia pesce
 - L'aliquota base Imu è del 7,6 per mille
 - Lo share per «Sanremo» è stato del 56,7 %
 - Ho vinto 6 partite su 8

Si può sempre frazionare?

- Continuo / discreto: ($3/4$ di 15 alunni)
- “una frazione di secondo”
- Qual è il numero che moltiplicato per 4 fa 15?
- Come si dividono 9 granite con panna tra 16 persone?
Sarebbe più facile se fossero 8 (le granite)?

Cosa è una frazione?

- ✓ Parte di un «intero»
- ✓ Quoziente
- ✓ Rapporto
- ✓ Operatore (Dimensionale)
- ✓ nei punteggi
- ✓ Indicazione di quantità di scelta su un tutto
- ✓ Punto di una retta orientata
- ✓ Misura
- ✓ Percentuale
- ✓ linguaggio quotidiano
- ✓ Probabilità
- ✓ Numero Decimale
- ✓ Numero Razionale

La frazione e le sue rappresentazioni

Nel caso delle frazioni, la quantità di registri semiotici a disposizione è immensa.

Non si impara *automaticamente* a gestire i diversi registri, a scegliere i tratti distintivi del concetto da trattare, a convertire; *questo* deve necessariamente essere il risultato di un insegnamento esplicito.

L'insegnante troppo spesso sottovaluta questo aspetto e passa da un registro all'altro, convinto che lo studente lo segua.

Cause Didattiche

- ✓ Trattazione scolastica che privilegia l'accezione di frazione come parte di un tutto
- ✓ Piuttosto che le indicazioni, si segue il libro di testo.
- ✓ Non si riesce a far «vedere» la frazione come numero
- ✓ L'insegnante «salta» da un registro semiotico all'altro, lo studente perde gli aspetti semantici

E allora....

**Una sola “definizione”
non basta**

ancora difficoltà....

- ✓ nell'ordinare frazioni e numeri decimali
- ✓ nelle operazioni tra frazioni e tra numeri razionali
- ✓ nel gestire l'aggettivo "uguale"
- ✓ nel gestire le equivalenze
- ✓ nel gestire la riduzione ai minimi termini
- ✓ nel gestire figure non standard
- ✓ nel passare da una frazione all'unità che l'ha generata
- ✓ nel riconoscere gli schemi, anche quelli più diffusi

INVALSI

Classe seconda primaria

**D6. Carlotta ha 6 anni, la metà degli anni di suo fratello Roberto.
Quanti anni ha Roberto?**

Risposta: anni

Risposta corretta: 12 o 12 anni o dodici o dodici anni

RISULTATI DEL CAMPIONE

errata	corretta	Non risponde
57,9	35,7	6,1

D17. Marco vuole preparare una torta al cioccolato per il suo compleanno. La ricetta dice che occorrono 600 g di cioccolato. Al supermercato vendono tavolette di cioccolata da 250 g l'una.

- a. Qual è il numero minimo di tavolette di cioccolata che Marco deve comprare?

Risposta:

- b. Se ogni tavoletta è formata da 10 quadretti, quanti quadretti di cioccolata servono a Marco per preparare la torta?



Risposta:

- c. Scrivi come hai fatto per trovare la risposta.

.....

.....

.....

Risposte corrette

D17a: 3

D17b: 24 o 24 quadretti

D17c:

- $250 : 10 = 25$ $600 : 25 = 24$
- Ho disegnato 3 tavolette divise in 10 parti e visto che ogni parte è 25 g ho contato fino ad arrivare a 600.

RISULTATI DEL CAMPIONE

	errata	corretta	Non risponde
D17a	36,2	58,6	5,0
D17b	70,9	18,7	10,1
D17c	68,3	13,5	17,6

<p>D23. Quale delle seguenti operazioni dà il risultato più grande?</p> <p>A. <input type="checkbox"/> $10 \times 0,5$</p> <p>B. <input type="checkbox"/> $10 \times 0,1$</p> <p>C. <input type="checkbox"/> $10 : 0,5$</p> <p>D. <input type="checkbox"/> $10 : 0,1$</p>	<p>Risposta corretta: D</p> <p>RISULTATI DEL CAMPIONE</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>Non risponde</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>71,2</td> <td>4,9</td> <td>10,0</td> <td>10,8</td> <td>2,2</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	C	D	Non risponde	71,2	4,9	10,0	10,8	2,2
A	B	C	D	Non risponde							
71,2	4,9	10,0	10,8	2,2							

<p>D10. Qual è la metà del numero $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$?</p> <p><input type="checkbox"/> A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$</p> <p><input type="checkbox"/> B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$</p> <p><input type="checkbox"/> C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$</p> <p><input type="checkbox"/> D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$</p> <p>RISPOSTA CORRETTA: C.</p> <p><i>Percentuali di risposta</i></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>mancata risposta</th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>19,8</td> <td>59,2</td> <td>12,1</td> <td>8,0</td> </tr> </tbody> </table>	mancata risposta	A	B	C	D	1	19,8	59,2	12,1	8,0
mancata risposta	A	B	C	D						
1	19,8	59,2	12,1	8,0						

Un esempio

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A+C}{B+D}$$

- Operazione ben posta
- $1/1+1/1=2/2=1$
- **$3/4+5/6=8/10$**

Esempio

$(1,2)/5$ è una frazione ?

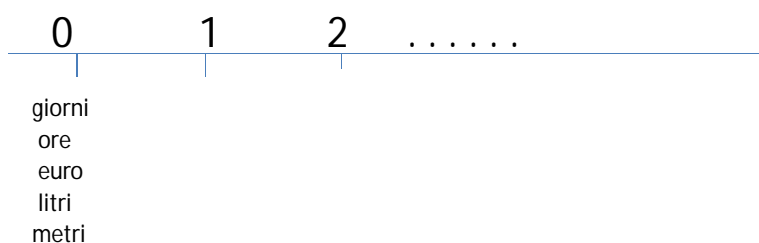
- Se si intende una frazione solo come il rapporto di 2 interi, la risposta è NO
- Ma $(1,2)/5 = (12/10)/5 = 12/50$, allora la risposta è SI
- Quindi anche
 $(12,5)/(52,32)$ è una frazione !

Prima le frazioni o prima i numeri decimali?

Quando si parla di frazioni si usano sempre situazioni didattiche

La linea dei numeri

Che cosa c'è tra 2 interi consecutivi?



Percentuali

- Il 25% degli italiani è vegetariano
- Il 100% dei greci non ha fiducia nel futuro
- Sono d'accordo con te al 200%
- Bisogna rivalutare la rendita catastale prima del 5% e poi del 60%
- C'è stato un aumento del costo delle pere del 20%
- C'è stato un aumento del costo delle pere del 120%
- Dal 1990 ad oggi il costo della vita è aumentato del 150%
- Il 15,7% di share

I rapporti

- ✓ In questa scuola il rapporto tra insegnanti e alunni è di 1 a 12
- ✓ In questa scuola ci sono 12 insegnanti e 190 alunni
- ✓ Un triangolo ha la base lunga 12 e i lati lunghi 10 e 8; quanto saranno lunghi i lati di un triangolo simile a questo con la base lunga 15?

Le equivalenze

- ✓ A quanti euro corrispondono 520 centesimi?
- ✓ A quanti metri corrispondono 520 cm?
- ✓ 1 cm è $1/100$ di m
- ✓ $520 \text{ cm} = 520/100 = 100/100 + 100/100 + \dots$
 $\dots = 5 + 20/100$

Ancora equivalenze

- ✓ 100 centesimi fanno 1 €
- ✓ Quanti centesimi sono 7,45 €

- ✓ 1000 m fanno 1 Km;
- ✓ Quanti m sono 7,45 Km?

Un itinerario possibile sulle Frazioni

- Costruzione dell'unità frazionaria $\frac{1}{2}$ “come parte” e “come operatore” su grandezze continue e su grandezze discrete
- Costruzione di altre unità frazionarie: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ...
- Costruzione della classe di equivalenza $\frac{1}{2}$ e poi di $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$
- Costruzione della frazione apparente 1 come classe di equivalenza

- Uso consapevole delle frazioni equivalenti
- Costruzione di altre unità frazionarie: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, ... e di frazioni con numeratore diverso dall'unità, come $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, ...
- Confronto tra unità frazionarie e loro ordinamento
- Costruzione consapevole di frazioni proprie equivalenti tra loro

- Superamento dell'idea di frazione come parte e introduzione delle frazioni improprie (per es. attraverso la misura)
- Scoperta della proprietà invariante delle frazioni
- Riconoscimento delle frazioni decimali attraverso le classi di equivalenza
- Confronto tra due frazioni con denominatore diverso
- Collocazione su una retta graduata di alcune frazioni comprese tra 0 e 1 e tra 1 e 2
- Introduzione alla probabilità

- Costruzione della tabella delle frazioni
- Introduzione al concetto di frazione come quoziente
- Applicazione del concetto di rapporto in rappresentazioni geometriche in scala: ingrandimenti e rimpicciolimenti di una figura
- Acquisizione del concetto di percentuale: analisi di situazioni problematiche
- Operazioni tra frazioni
- MCD e mcm