

Immagini, disegni e figure: costruire il sapere Geometrico con l'aiuto di strumenti

Maria Alessandra Mariotti
DIISM – Università di Siena
mariotti21@unisi.it

Di cosa parleremo

- ▶ Esempi introduttivi: la nozione di Concetti Figurali
- ▶ Ancora esempi di difficoltà
- ▶ Disegno e pensiero geometrico
- ▶ Disegnare con strumenti
- ▶ ... in un AGD

La geometria e le immagini

"La geometria (la geometria Euclidea elementare) occupa una posizione specifica tra le altre branche della matematica e tra tutte le altre discipline per il suo carattere unico che consiste nella unione di logica immaginazione e pratica. [...]
In tutto questo sta l'importanza di insegnare un corso di geometria in tutte le scuole [...].

(A.D. Alexandrov, Geometry as an element of culture, ICME 7, Quebec, 1992)

"Dall'ordine delle cose esterne, nella rappresentazione data alla mente dai sensi, scaturisce il concetto di spazio. La geometria studia questo concetto già formato nella mente del geometra, senza porsi il problema (psicologico ma non matematico) della sua genesi. Sono dunque oggetto di studio nella geometria, i rapporti intercedenti fra gli elementi (punti, linee, superficie, rette, piani, ecc.) che costituiscono il concetto di spazio: a tali rapporti si dà il nome di proprietà spaziali o geometriche.[...]

Lo studio di queste proprietà si fa dal matematico in due modi:

1. esercitando l'intuizione (psicologica) sopra i concetti spaziali;
2. deducendo col ragionamento logico nuove proprietà da quelle date dall'intuizione, (le nuove proprietà ottenute diconsi dimostrate).

(F. Enriques, Lezioni di Geometria Proiettiva, 1920, pp. 1-2).

Intuizione - Astrazione

In matematica ... sono presenti due tendenze

Da una parte, la **tendenza all'astrazione** che cerca di cristallizzare le relazioni logiche inerenti al complesso materiale che si deve studiare, e di correlare tale materiale in modo sistematico e ordinato.

Dall'altra parte, la **tendenza all'intuizione**, che si propone di raggiungere una comprensione immediata gli oggetti che si studiano, un rapporto vivo con essi, che evidenzii il significato concreto delle loro relazioni.

... anche oggi come sempre si ritiene che l'intuizione abbia un ruolo importante in geometria. E tale intuizione concreta ha un grande valore ...

Hilbert & Cohn-Vossen, 1932

L'educazione geometrica

- ▶ Competenze e abilità spaziali fondamentali per lo sviluppo di concetti matematici, non solo geometrici ... ma fondamentale anche per altre discipline
- ▶ A scuola
 - Se la geometria piana è in estinzione ... la geometria dello spazio forse si è già estinta !
- ▶ Non possiamo contare su uno sviluppo spontaneo delle intuizioni Geometriche ...

In letteratura troviamo generale consenso

Non sembra esserci uno sviluppo spontaneo delle capacità di visualizzazione al di là di un livello piuttosto basso che ha caratteristiche di

- essere pertinente rispetto alla esperienza pratica che ciascun di noi ha del mondo fisico.
- rivelare scarsa consapevolezza dei concetti / proprietà (in atto) evidenziata da prestazioni assai deboli nella verbalizzazione di situazioni spaziali.
- subire l'influenza e interferenza di prototipi / stereotipi (immagini mentali) che si insinuano sfuggendo al controllo concettuale.

Necessità di un'educazione geometrica

Un aspetto paradossale

Uno stretto legame tra la geometria e il mondo della nostra esperienza fisica, ma ...

Come è possibile che una disciplina così radicata nell'esperienza quotidiana di ciascuno presenti poi difficoltà così grandi?

- ▶ "Le savoir géométrique s'intéresse à deux champs de savoir: l'espace matériel, voir physique et l'espace théorique qui – après la découverte des géométries non-euclidiennes – se centre sur l'analyse de relations logiques entre des énoncés, relations découlant partiellement de l'analyse de l'espace matériel." (Laborde, RDM 9.3 pp.341–45)

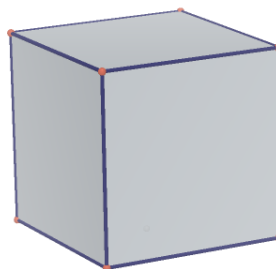
La doppia natura della Geometria

La geometria ha la sua origine nella concettualizzazione dello spazio fisico nel quale viviamo, ma mette in gioco oggetti e relazioni teoriche

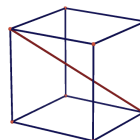
- ▶ Dominio pratico con una validazione legata all'esperienza sensibile
- ▶ Dominio teorico con una validazione sua propria (dimostrazione)

Un caso 'banale'

Le diagonali di un cubo sono tra loro perpendicolari?



Questa è una diagonale ...



Dal punto di vista psicologico

I concetti geometrici non possono ridursi a pure astrazioni, ma partecipano di una **componente figurale** che deriva dal loro originale legame con la realtà, e caratterizza il loro essere concetti spaziali.

Fischbein (1993) parla di "figural concepts".

In teoria l'armonia tra **la componente figurale** e quella **concettuale** è perfetta, ma quello che accade in realtà è che talvolta l'armonia tra le due componenti si rompe, **creando situazioni di conflitto**, e spesso di errore.

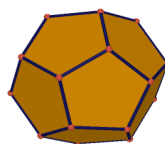
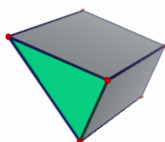
In questo senso possono essere interpretate molte difficoltà che si incontrano ragionamento geometrico ...

Strategie di conteggio

- ▶ Contare facce, vertici e spigoli di un dato solido. Il compito è richiesto prima senza oggetto e dopo con l'oggetto.
- ▶ Provare con
 - un cubo
 - un tetraedro regolare

Qualche esempio

Un problema semplice
Contare facce vertici e spigoli di un cubo ... di un prisma, di un dodecaedro



Riassumendo

Sembra facile ... ma sorprende quanto è difficile

- * L'immagine mentale è organizzata secondo schemi spaziali diversi
- * La presenza dell'oggetto può distruggere tale organizzazione
- * Quando si conta con un'operazione e si sbaglia ...
- * Possibile interferenza delle immagini standard

Qualche esempio: una definizione di prisma

Discussione collettiva classe 1 media

- ▶ (241) Mattia : il prisma ha due facce uguali e parallele e poi deve avere delle facce laterali a forma di rettangolo che partono da ogni lato del sopra



l'insegnante riprende la definizione
dopo aver introdotto la parola **base**

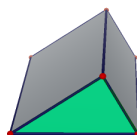
- 246.Ins : se come base del prisma scelgo un rettangolo, allora questo prisma si chiama anche ppd. Riproviamo a dire, le caratteristiche sono chiare?
- Il prisma ha due facce uguali e parallele, di qualsiasi forma, e le altre facce rettangolari. Dunque succede una cosa curiosa, perché se scelgo come facce uguali e parallele due rettangoli, il prisma si chiama anche parallelepipedo. Ora, sentite una cosa, cambiano le cose se io li metto così? (appoggiati su una faccia rettangolare)
- 247.Mattia : ehm. ..ma..
- 248.Giovanni : ma...
- 249.Mattia : dobbiamo guardare solo la forma
- 250.Davide : restano uguali, perché ad esempio, la figura resta la stessa, il volume resta lo stesso.
- 51.Coro : no, no

La discussione riprende più avanti

...

- 291.Ins : ho capito. E ora, sentite bene, se li appoggio così le basi restano queste?
- 292.Mattia : sì
- 293.Davide : no, diventano le facce laterali

Confusione



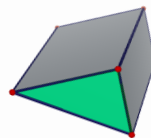
294. Mattia : la base è la faccia che sostiene la figura
295. Ins : è la faccia di appoggio? e allora mi dite che un prisma deve avere due basi uguali e parallele, se io li appoggio così che cosa succede?
296. Davide : non sono più prismi
297. Ins : allora, per definire un solido, dipende da come è appoggiato?
298. Davide : non so, perché il volume resta lo stesso, la forma resta la stessa
299. Giovanni : cambia il modo di vederla
300. Davide : è solo un prisma, messo in orizzontale. Cambia il modo di vederlo
301. Mattia : cambia il modo di vederlo
302. Fabio : noi abbiamo detto che le basi devono essere parallele, non c'entra che il volume resta lo stesso

294. Mattia : la base è la faccia che sostiene la figura
295. Ins : è la faccia di appoggio? e allora mi dite che un prisma deve avere due basi uguali e parallele, se io li appoggio così che cosa succede?
296. Davide : non sono più prismi
297. Ins : allora, per definire un solido, dipende da come è appoggiato?
298. Davide : non so, perché il volume resta lo stesso, la forma resta la stessa
299. Giovanni : cambia il modo di vederla
300. Davide : è solo un prisma, messo in orizzontale. Cambia il modo di vederlo
301. Mattia : cambia il modo di vederlo
302. Fabio : noi abbiamo detto che le basi devono essere parallele, non c'entra che il volume resta lo stesso

303. Ins : noi abbiamo detto che le basi devono essere parallele, invece se lo appoggi così?
304. Davide : **non cambia niente**
305. Mattia : non cambia niente
306. Davide : è come questo, scusa, se tu lo metti così come lo chiami? parallelepipedo; se lo metti così (ribalta il ppd) sempre ppd, se lo metti così sempre ppd
307. Mattia : **tu devi guardare solo le facce** così : deve avere **le 2 facce parallele** e ce le ha lo stesso
308. Ins : le ha lo stesso due facce uguali e parallele?
309. Mattia : cioè, sì, le ha lo stesso, **però per regola** dovrebbe essere messo così (appoggiato su una base)

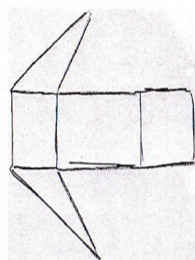
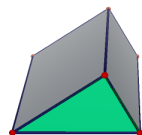
Aspetti chiave

- ▶ La posizione, e in particolare la posizione rispetto al sistema di riferimento privilegiato (**Orizzontale/Verticale**)
- ▶ Come appare (come lo vedo) nel cso del prisma può essere che si accentui la presenza di una punta.

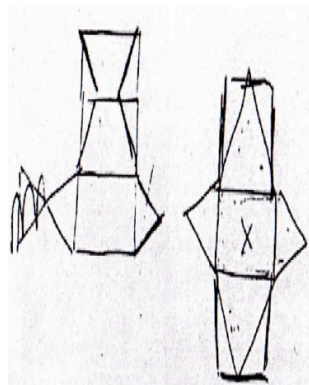


Problemi simili in un altro compito

- ▶ Disegnare lo sviluppo di un prisma



Andrea 11



Lara 18 anni

I primi passi in Geometria

Il rapporto tra spazio vissuto e geometria

Discussione in una classe V elem

- 366 M - ... Su questo discorso della profondità, siete d'accordo?
- 367 D - Ma tutti hanno una profondità.
- 368 M - Tutte le cose hanno una profondità, ma, se io immagino le facce di questi poligoni come li chiamate voi [si riferisce ai poliedri che i ragazzi ancora chiamano poligoni] ... la faccia ha una profondità?
- 369 A - No, soltanto le facce no, tutt'insieme il poligono ha una profondità, se è un cubo ... se non è un cubo ...
- 370 D - Secondo me, come si guarda tutto ha una profondità ... [prende un prisma triangolare] ora in questo caso non si vede bene, però quel rettangolo lì ...

- 381 M - Quindi le facce hanno tutte una profondità, siete tutti d'accordo? Cecilia? Non ti vedo tanto d'accordo.
- 382 C - No, non proprio, perché se io prendo ... ad esempio [strappa un foglio dal suo quaderno] questo è un rettangolo e non ha la profondità.
- 383 M - Quel foglio lì non ha la profondità.
- 384 S - No.
- 385 M - Secondo Daniele?
- 386 D - E invece sì, perché la profondità è piccolissima, però la profondità ...
- 387 S - E' vero!
- 388 I - E' vero, se noi ... anche se è piccolissima.

396 M – Allora secondo voi questo foglio è come questa scatola?
 397 S – Come quello lì, messo ...
 Confusione
 399 D – Quello lì ha uno spessore abbastanza piccolo ...
 400 I – Tutte le cose hanno una profondità, se no non ci si avrebbe niente in mano
 401 D – Se no sarebbe tutto piatto ... sarebbe un disegno.
 402 M – Ma allora le figure geometriche che avete studiato fino ad ora, di cui sapete tutti i nomi, i quadrati, i triangoli, i triangoli rettangoli, ... secondo voi ce l'hanno uno spessore?
 403 V – Sì, tutti!
 404 I – Anche nel foglio di carta si può trovare uno spessore ...
 405 M – Ma il foglio di carta è una figura geometrica?
 407 Silenzio. 408 Coro – Sì...
 408 D – Dipende dalla figura geometrica, perché se la guardiamo è una figura geometrica come possono essere tutte le cose.

[...] comportandosi da persone pratiche e non rivelando nei loro discorsi che scopi pratici. Parlano di 'quadrare' e di 'costruire su una linea data', di 'aggiungere per apposizione', usano ogni sorta di simili espressioni. Invece tutta questa disciplina va coltivata in funzione della conoscenza. [...] che la si coltiva in funzione della conoscenza di ciò che perennemente è, ma non di ciò che è in dato momento e finisce .

(Platone, Repubblica, 527, a)

"In fact, if experimental geometry means that the student makes experiments, then a great part of his mathematical activity should be experimental, as is the activity of the creative mathematician. If it should remind us of experimental physics, it is wholly mistaken" (Freudenthal, 1973).

Geometria e concezioni spaziali

La relazione tra

Geometria e pensiero geometrico

e

“Concetti spaziali” e “pensiero spaziale”

Al di là della prossimità è bene distinguere e non appiattare

**PROBLEMA
DIDATTICO**

Il disegno in geometria

"In fact, if experimental geometry means that the student makes experiments, then a great part of his mathematical activity should be experimental, as is the activity of the creative mathematician. If it should remind us of experimental physics, it is wholly mistaken" (Freudenthal, 1973).

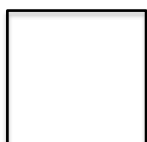
Disegno come mezzo per sperimentare

Tutta la geometria della realtà sensibile poteva essere rinchiusa nei limiti di un foglio di carta ... la sperimentazione geometrica impegnava così tutti i suoi mezzi in una sola forma di sperimentazione, la sperimentazione grafica.
(Chevallard & Jullien , 1990–91, p. 58)

Ambiguità del termine figura

L'ambiguità della parola **figura**

disegno come tracciato materiale, una delle possibili rappresentazioni di una **figura geometrica**, ma non la sola ...



Quadrato

Una distinzione utile

Nel seguito distingueremo il disegno e la figura, indicando con *disegno* il disegno tracciato su un foglio di carta (o su un altro supporto) e con *figura* l'oggetto matematico. Il disegno non è una rappresentazione ... In questo modo, la figura è un elemento del mondo matematico e non del mondo sensibile.

(Arsac, 1989, p. 86)

Potenzialità e pericoli del disegno

► Una distinzione fondamentale:

- Disegno come la traccia grafica sul foglio (o altra qualsiasi traccia ad esempio un insieme di pixel sullo schermo)
- Figura come l'oggetto (astratto) matematico

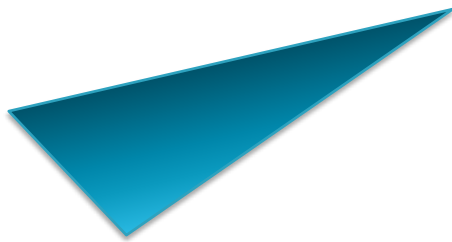
Il primo è un oggetto sensibile sul quale è possibile agire concretamente.

La seconda è un oggetto matematico sul quale è possibile agire secondo le regole della matematica.

Come armonizzare disegno e figura?

Che cosa c'è di particolare nei disegni in Geometria?

- ▶ Un disegno rappresenta relazioni spaziali espresse dal concetto geometrico tramite relazioni spaziali tra le tracce grafiche prodotte sul foglio.



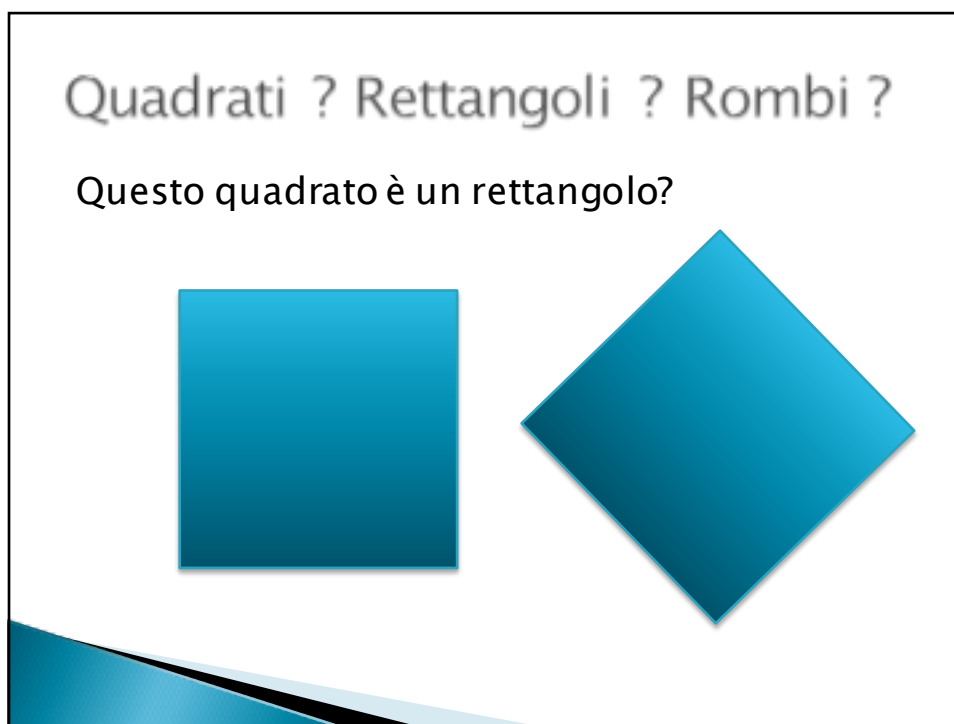
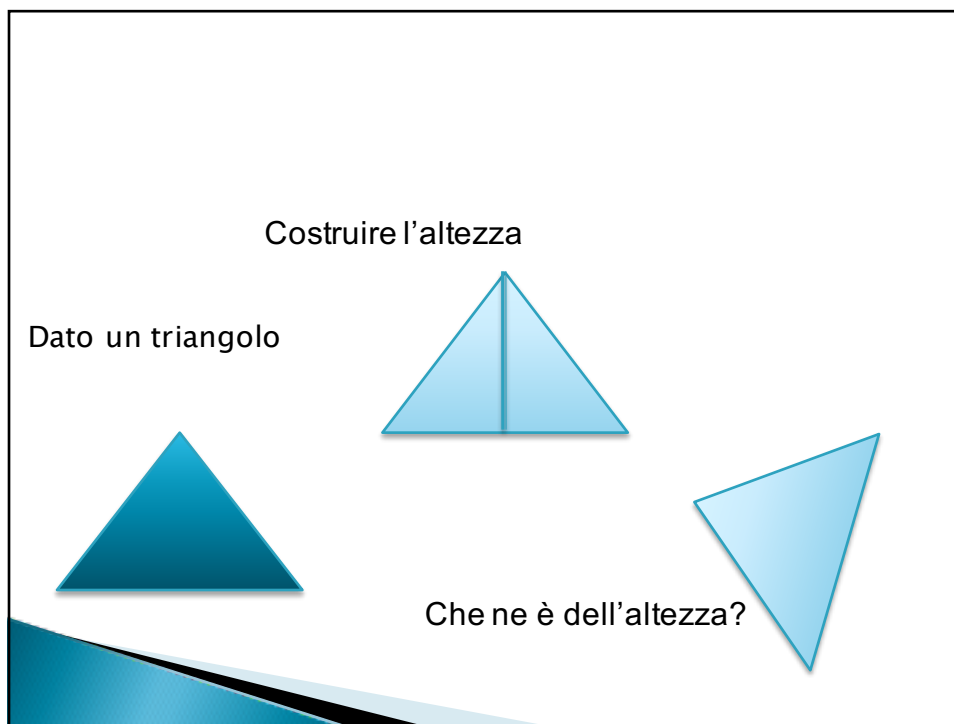
TRIANGOLO

Dai disegni alle definizioni

Se sembra impossibile evitare il ricorso ai disegni (esempi) ...

È certo che niente può garantire la convergenza tra la concettualizzazione 'spontanea' e quella 'matematica'

Ecco l'emergere di "stereotipi" ... o "misconcetti" ...



Il disegno nella dialettica Figurale/Concettuale

- ▶ Il disegno come segno
 - ICONA: “ciò che mostra la stessa qualità, o la stessa configurazione di qualità dell’oggetto denotato, per esempio una macchia nera per il colore nero
 - ICONA spesso arricchita da simboli ... etichette e testi esplicativi / illustrativi.

Nei libri di geometria

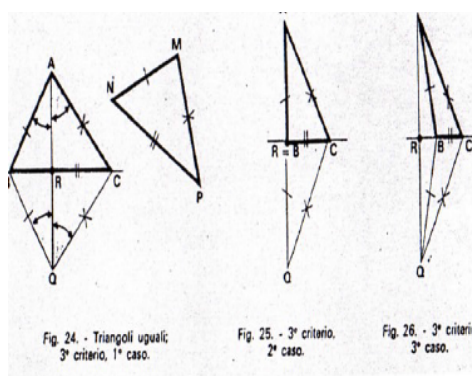


figura 2.3. Illustrazioni di questo tipo si trovano su tutti i libri di testo.

Concetti e rappresentazioni

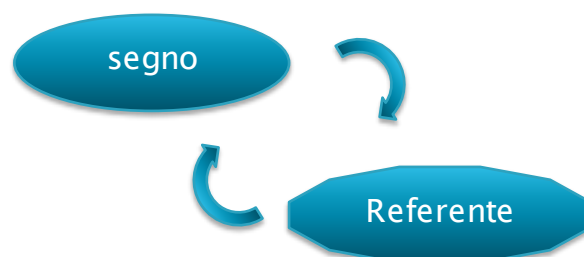
Un disegno può essere considerato una rappresentazione: un segno che rinvia ad un referente astratto ...

... una figura geometrica,
è ciò che abbiamo chiamato Concetto Figurale

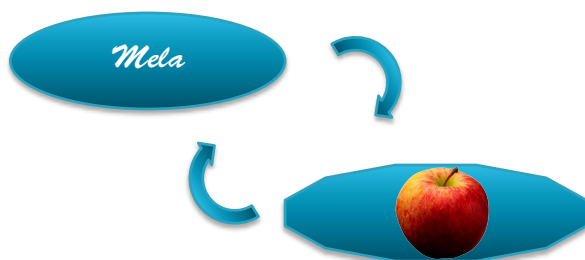
Ma un segno esiste se non in quanto qualcuno stabilisce un rapporto di significazione

Rappresentazione

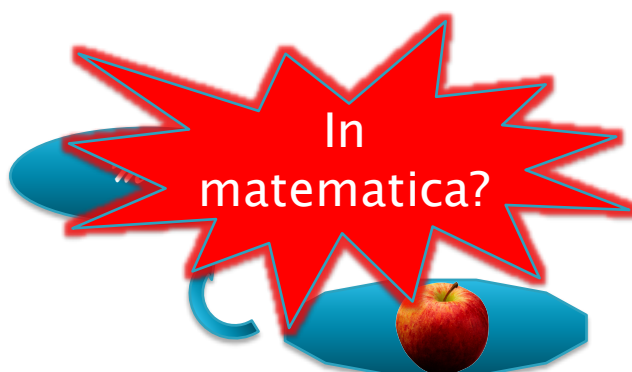
- ▶ E' necessario distinguere *la relazione di significazione* e *la funzione referenziale* (= denotazione)

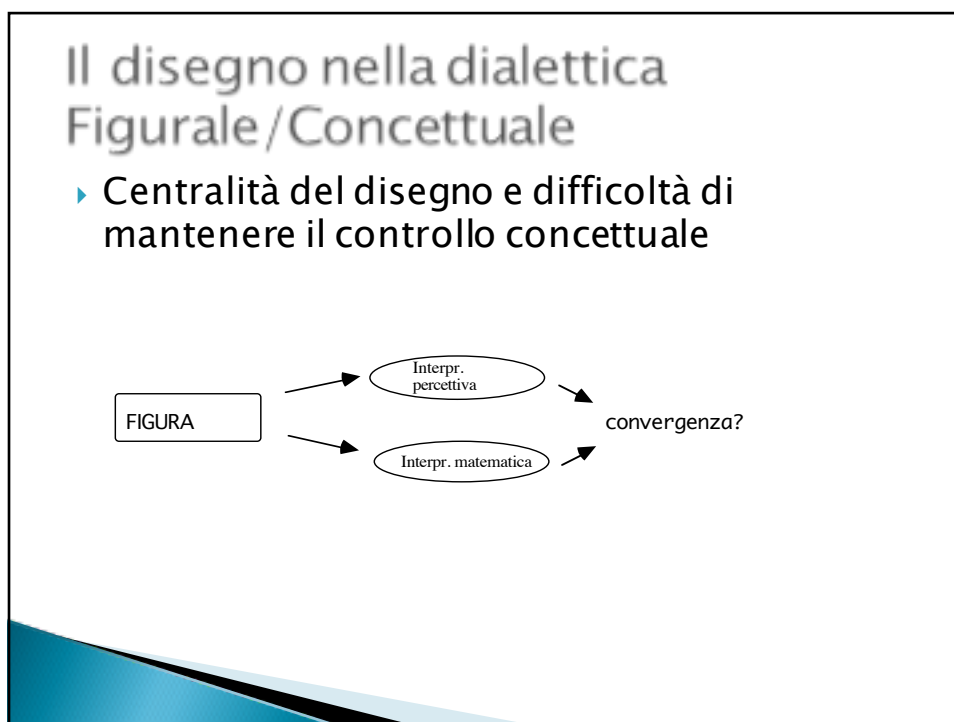


- ▶ E' necessario distinguere *la significazione* e la *funzione referenziale* → denotazione),



- ▶ E' necessario distinguere *la significazione* e la *funzione referenziale* → denotazione),





Controllo tra disegno e figura

- ▶ Il controllo tra disegno e figura dipende da un atto mentale del soggetto ...
- ▶ Come rendere consapevoli gli allievi del passaggio dalla lettura spontanea alla lettura geometrica?
- ▶ Non dare per scontata la lettura geometrica
- ▶ Lasciare libertà di esprimere letture diverse ...
- ▶ Trovare problemi che per la loro soluzione richiedano 'letture geometriche'

Artefatti e Geometria

Disegnare tondi o disegnare cerchi?



Che differenza c'è nell'uso di questi artefatti?



Confrontiamo questi artefatti

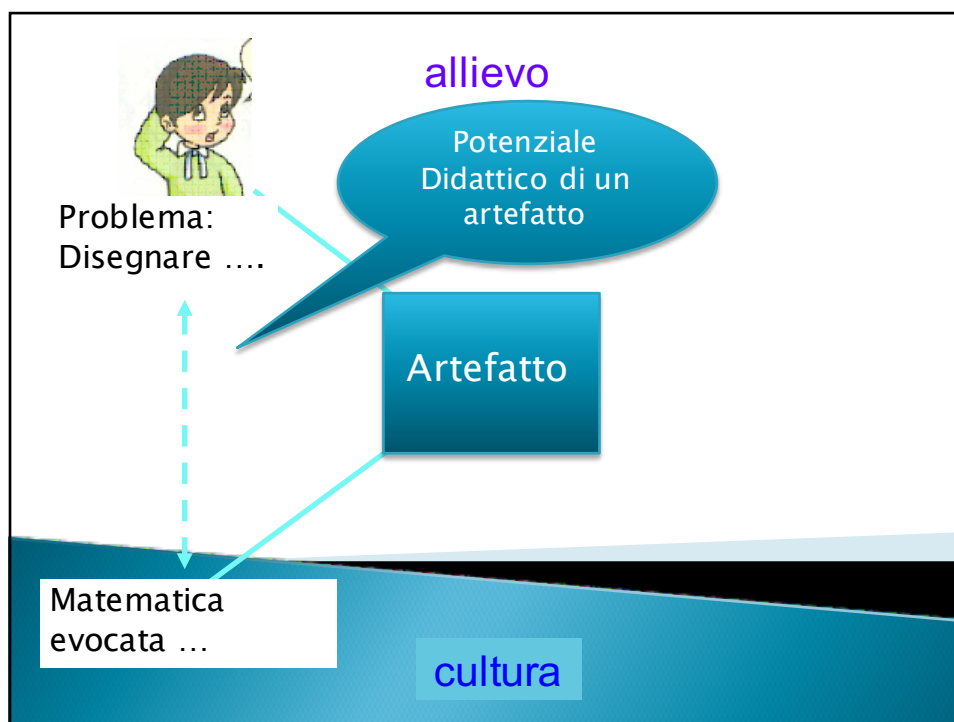
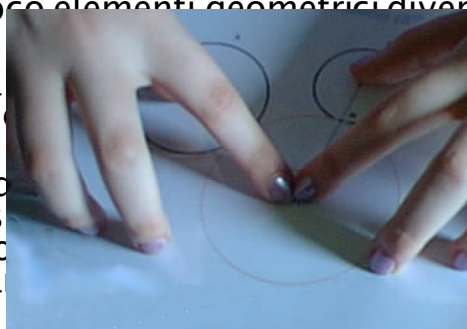
- ▶ un movimento “circolare” che genera una traiettoria ...
- ▶ Il prodotto finale, un segno grafico rotondo
- ▶ la procedura eseguita è però molto diversa e ... mette a fuoco elementi geometrici diversi.

- ▶ la presenza di un punto assai particolare, il punto nel quale viene posta la punta di una gamba del compasso
- ▶ L'apertura del compasso e che si mantiene costante , sarà la distanza costante da tutti i punti che formano la linea curva descritta dalla seconda gamba del compasso.

Confrontiamo questi artefatti

- ▶ un movimento “circolare” che genera una traiettoria ...
- ▶ Il prodotto finale, un segno grafico rotondo
- ▶ la procedura eseguita è però molto diversa e ... mette a fuoco elementi geometrici diversi.

- ▶ la presenza nel quale vi è il compasso
- ▶ L'apertura costante, su punti che formano la seconda gamba del compasso

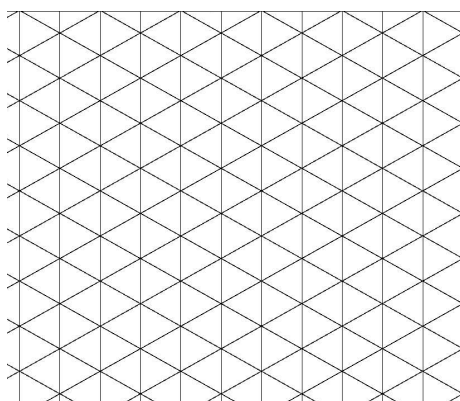


Disegnare con strumenti

- ▶ Disegnare su carta, su carta a quadretti, su carta isometrica, ...

63

Disegnare su carta 'strutturata'



Carta isometrica



Carta a quadretti

Disegnare in un AGD

Quale potenziale didattico in un ADG?

- ▶ Un ADG è un artefatto complesso:
 - Un sistema di artefatti e una modalità che li combina:

Trascinamento

Invarianti per trascinamento

Il concetto di invariante è fondamentale rispetto alla categorizzazione e al riconoscimento, ovvero rispetto alla concettualizzazione ma anche rispetto alla definizione.

Esempio 1

► Un triangolo ... come si disegna?

Analisi della figura/concetto in base agli strumenti, in particolare

Se non si dispone del comando triangolo ma solo di strumenti come **punto** e **segmento**

Importante che si facciano varie prove e si stabilisca che i disegni che si accettano sono quelli che non si rompono!

Tre punti, congiunti da tre segmenti.

Condividere e **memorizzare** la **procedura** di disegno contribuisce alla costruzione **del significato di triangolo**.



67

Esempio 2

► Costruiamo quadrilateri

- Dalla procedura alla definizione della figura
- Muovere le figure permette di costruire una immagine mentale più ricca rispetto al prototipo



► Confrontiamo quadrilateri

- A partire da una figura costruita è possibile trasformarla in ... un'altra?



68

Confronto tra due ambienti:

- ▶ Atto del disegnare (non recuperabile)
- ▶ Disegno
- ▶ Apprensione globale
 - Mancanza di gerarchia tra le proprietà ...
- ▶ Procedura
- ▶ Figura/disegno sullo schermo
 - Invarianti di costruzione
 - Invarianti derivati
- ▶ Apprensione analitica e globale
 - gerarchia di proprietà derivata dagli invarianti

Carta e matita

AGD

69

GRAZIE!